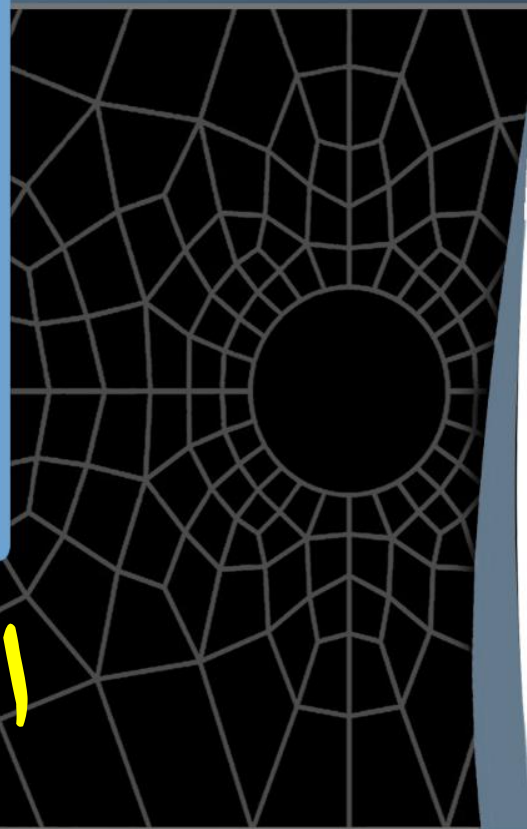
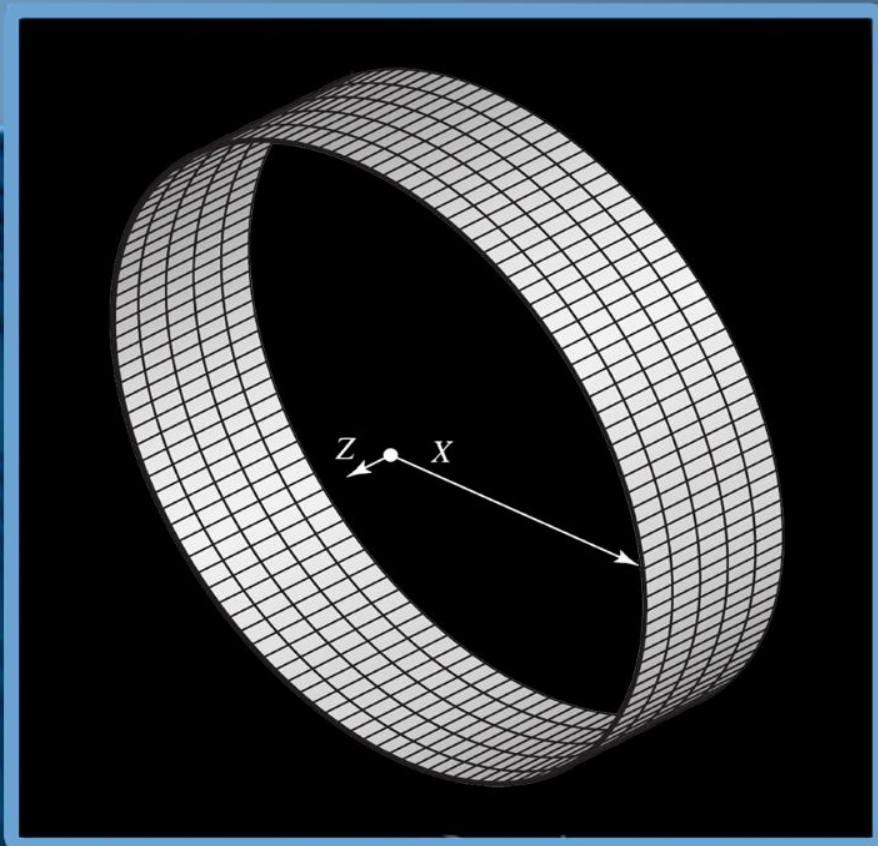


فصل دوم



المان های فنر و میله

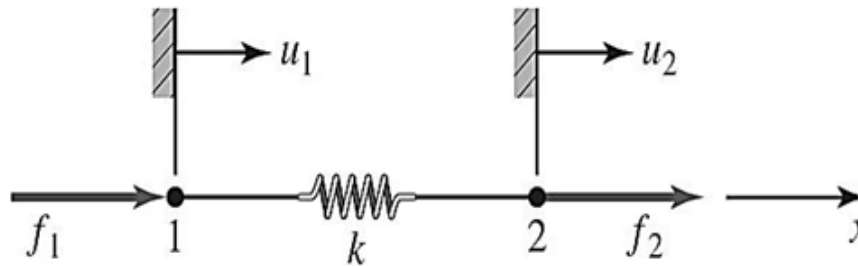
مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران

مرجع اصلی:

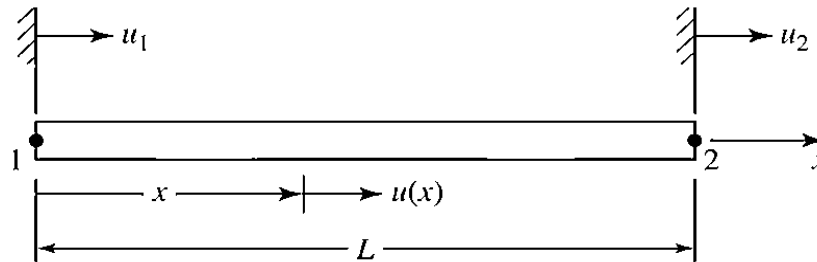
مقدمه

❖ در این فصل دو نمونه المان سازه‌ای یک بعدی ساده مورد بررسی قرار می‌گیرد:

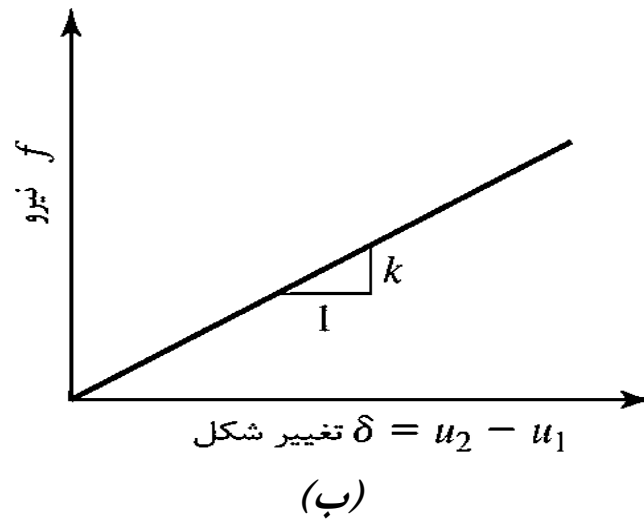
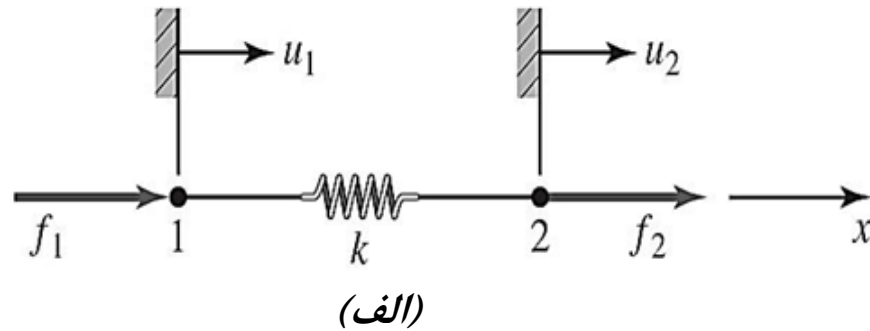
فنر الاستیک خطی



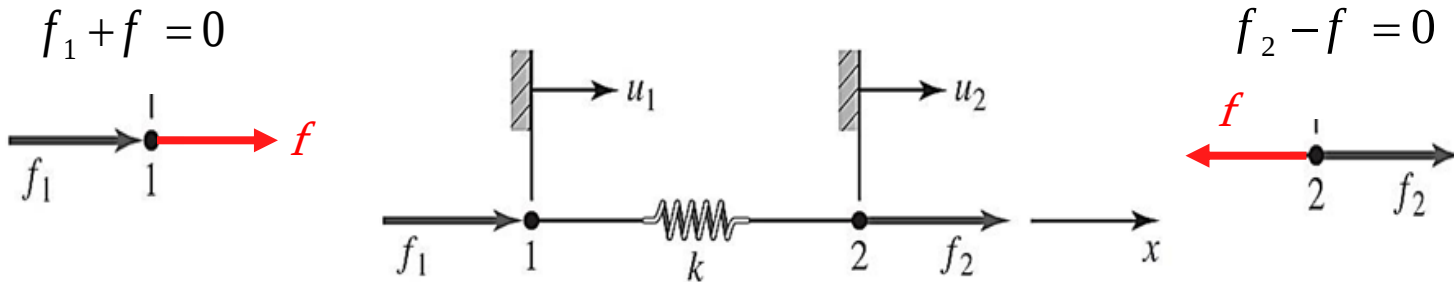
و عضو کششی - فشاری (المان میله)



المان فنر خطی



(الف) المان فنر با گره‌ها، جابجایی‌های گرهی و نیروهای گرهی. (ب) منحنی نیرو-تغییر شکل



$$\delta = u_2 - u_1$$

$$f = k\delta = k(u_2 - u_1) \quad (1)$$

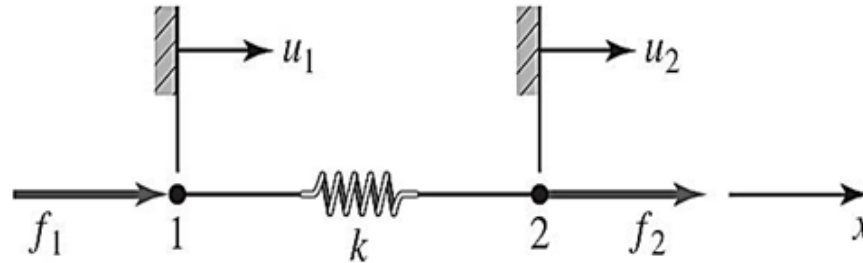
$$f_1 = -f = -k(u_2 - u_1)$$

$$f_2 = f = k(u_2 - u_1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k_e]\{u\} = \{f\}$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$



$[k_e]$: ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات المانی (یا دستگاه محلی)

$\{u\}$: بردار جابجایی‌های گره‌ای

$\{f\}$: بردار نیروهای گره‌ای

- ماتریس در حالت کلی با براکت $[]$ و ماتریس ستونی (بردار) با آکولاد $\{ \}$ مشخص می‌شود.

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

❖ ماتریس سختی المان برای المان فنر خطی یک ماتریس 2×2 است.

این موضوع حاکی از آن است که تغییر شکل این المان با دو جابه‌جایی گره‌ای (یا درجه‌ی آزادی) نشان داده می‌شود که این جابه‌جایی‌ها مستقل از هم نمی‌باشند (چرا که جسم پیوسته و الاستیک است).

❖ در صورتی که یک المان با N درجه آزادی توصیف شود، آن المان دارای ماتریس سختی متقارن و $N \times N$ است.

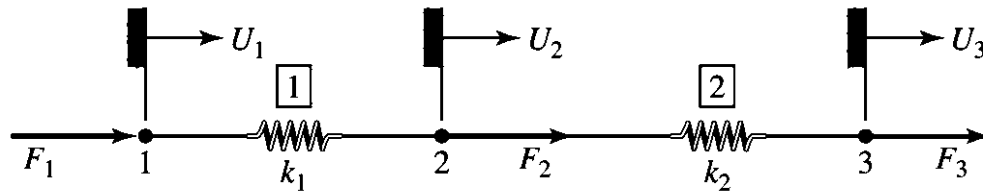
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [k_e]^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (۷-۲)$$

$[k_e]^{-1}$ معکوس ماتریس سختی المان است. با این حال، معکوس این ماتریس وجود ندارد، زیرا دترمینان این ماتریس سختی المان دقیقاً صفر است.

❖ ماتریس سختی تکین است.

❖ مونتاژ المان ها، برای یک سیستم متشکل از چند المان فنر:

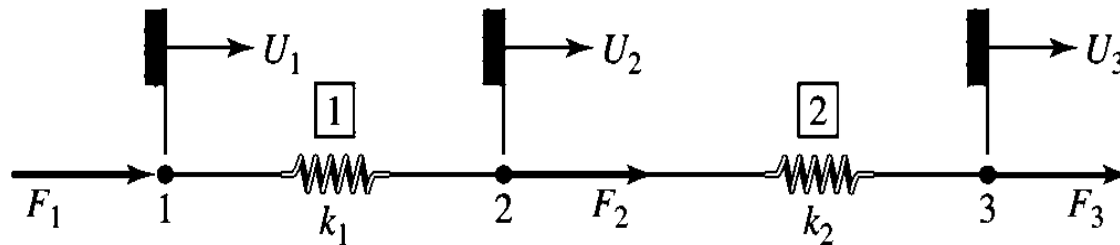
با نوشتن معادلات تعادل هر گره و در نظر گرفتن اثر نیروی هر المان متصل به آن گره در معادله تعادل، می توان رفتار مکانیکی المان ها را مونتاژ کرد.



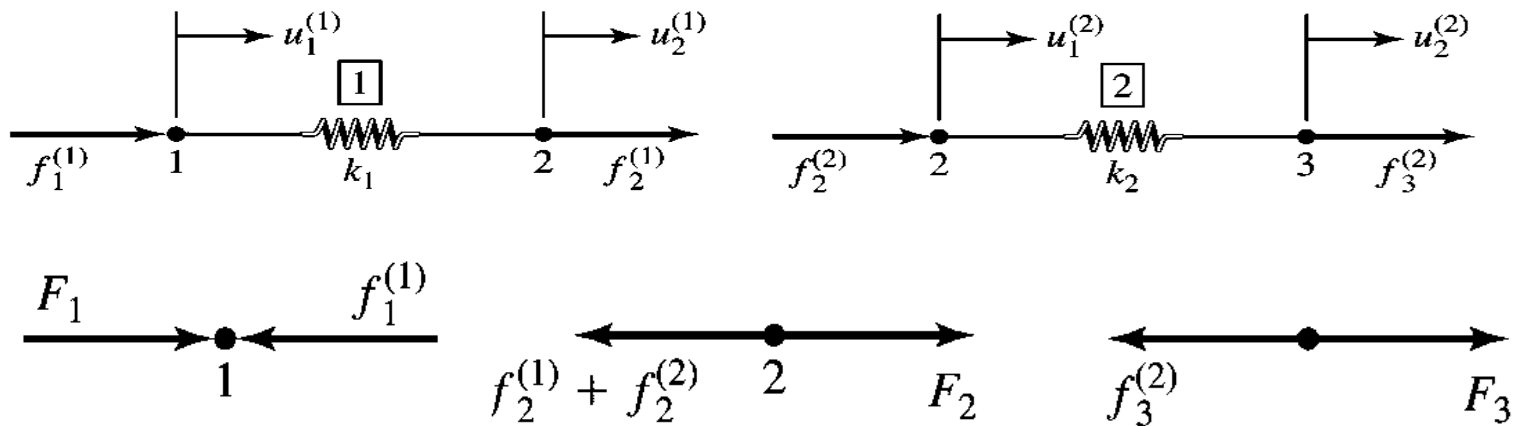
$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

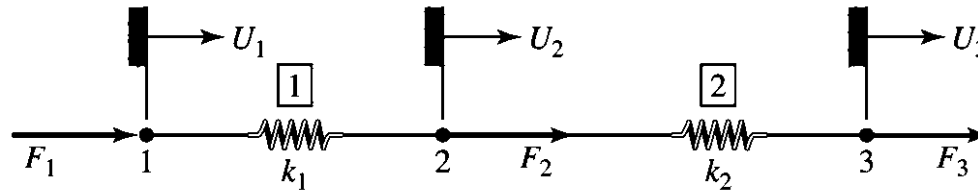
- اعداد بالانویس معرف شماره المان می باشد.



سیستم دو فنی به همراه شماره گره‌ها، شماره‌ی المان‌ها، جابجایی‌های گرهی و نیروهای گرهی



دیگرام‌های جسم آزاد المان‌ها و گره‌ها برای سیستم دو المانی



$$u_1^{(1)} = U_1$$

$$u_2^{(1)} = U_2$$

$$u_1^{(2)} = U_2$$

$$u_2^{(2)} = U_3$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

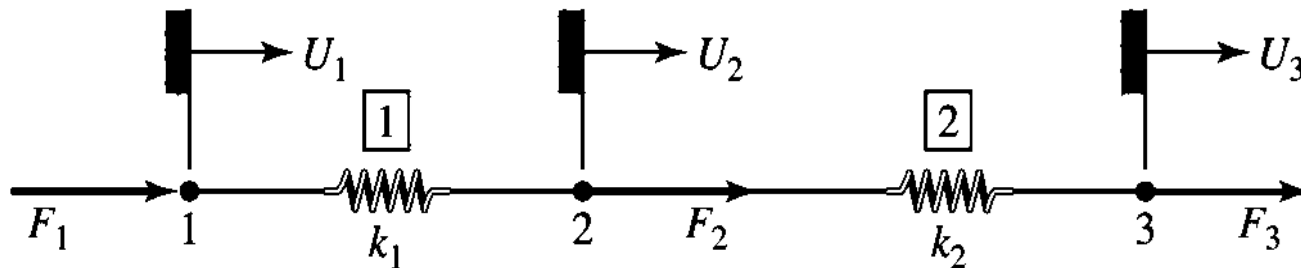
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$f_1^{(1)} = F_1 \quad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = F_2 \quad f_3^{(2)} = F_3$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad [K]\{U\} = \{F\}$$

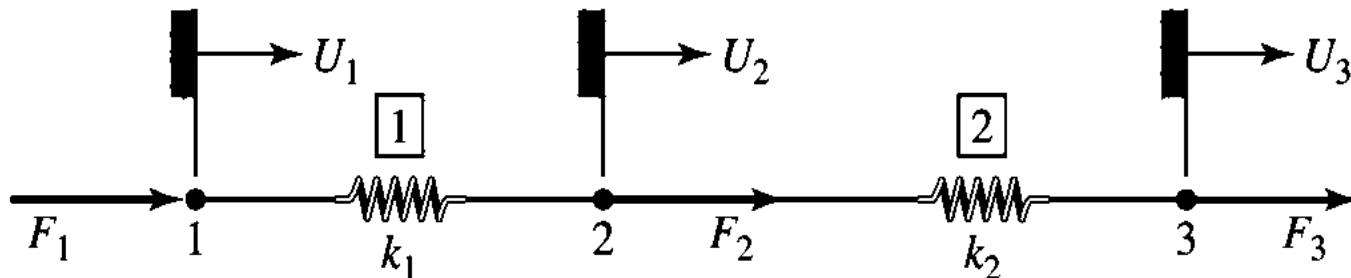


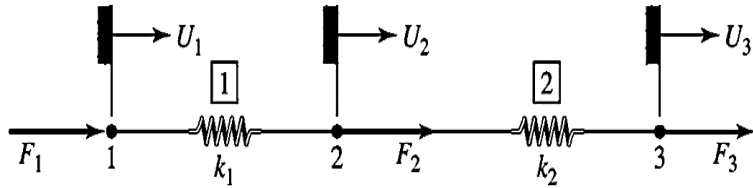
مثال

سیستم دو المانی نشان داده شده در شکل که در آن گره ۱ به یک تکیه‌گاه ثابت متصل و لذا محدودیت جابجایی $U_1 = 0$ حاصل شده است، را با داده‌های زیر در نظر بگیرید.

$$k_1 = 50 \text{ lb/in}, \quad k_2 = 75 \text{ lb/in}, \quad F_2 = F_3 = 75 \text{ lb}$$

برای این شرایط، جابجایی‌های گره‌های U_2 و U_3 را تعیین کنید.





حل مثال

$$\begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 125 & -75 \\ 0 & -75 & 75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 75 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

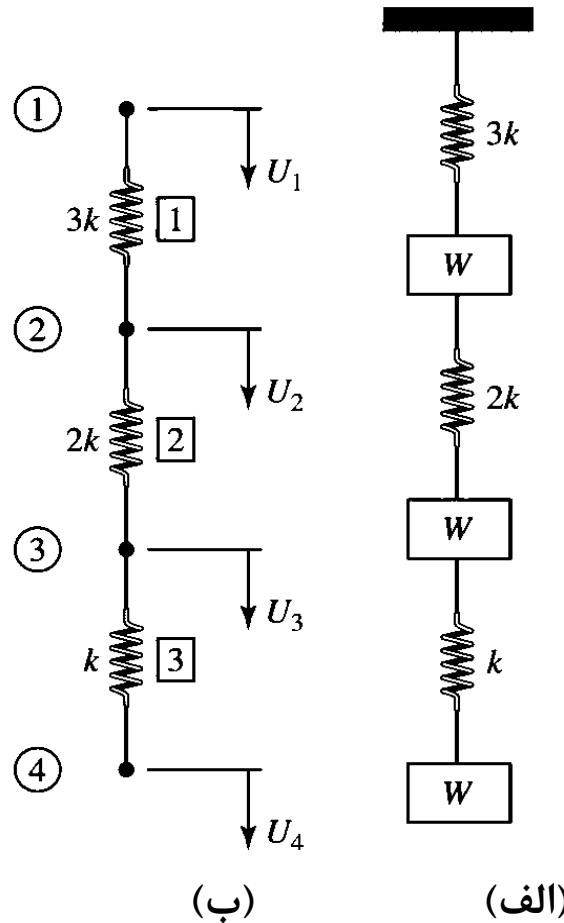
$$\begin{bmatrix} 125 & -75 \\ -75 & 75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 75 \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad -50U_2 = F_1$$

- با حل معادلات فوق $U_2 = 3 \text{ in}$ و $U_3 = 4 \text{ in}$ به دست می آید. با جایگذاری مقادیر محاسبه شده ی U_2 و U_3 در معادله مقید، مقدار $F_1 = -150 \text{ lb}$ به دست می آید،

$$\begin{bmatrix} 50 & -50 \\ -50 & 50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -150 \\ 150 \end{Bmatrix} \text{ lb.} \quad \text{برای المان ۱}$$

$$\begin{bmatrix} 75 & -75 \\ -75 & 75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -75 \\ 75 \end{Bmatrix} \text{ lb.} \quad \text{برای المان ۲}$$

مثال



فنرهای الاستیک حمل کننده وزنه‌ها

حل مثال

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix};$$

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}$$

$$[k^{(3)}] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$u_1^{(1)} = U_1$$

$$u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = U_2$$

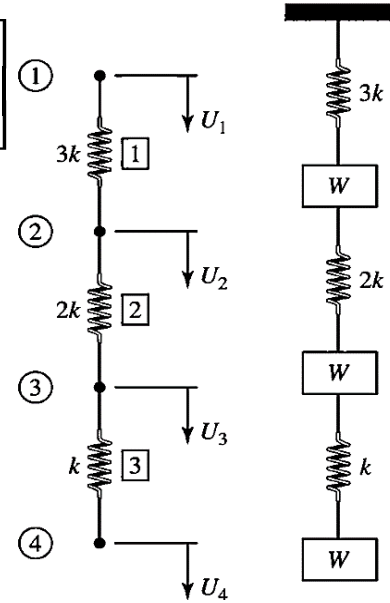
$$u_2^{(2)} = u_1^{(3)} = U_3$$

$$u_2^{(3)} = U_4$$

$$\begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3)$$



حل مثال

$$k \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ W \\ W \\ W \end{Bmatrix}$$

با جمع روابط ۱ تا ۳، نتیجه می شود که

(۴)

$$-3kU_2 = F_1 \quad (۵)$$

با اعمال قید جابجایی $U_1 = 0$ ،

$$k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W \\ W \\ W \end{Bmatrix}$$

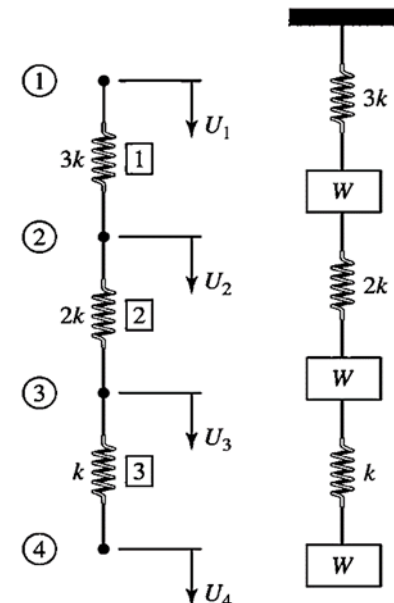
(۶)

$$U_2 = \frac{W}{k}$$

$$U_3 = \frac{2W}{k}$$

$$U_4 = \frac{3W}{k}$$

$$F_1 = -3W$$

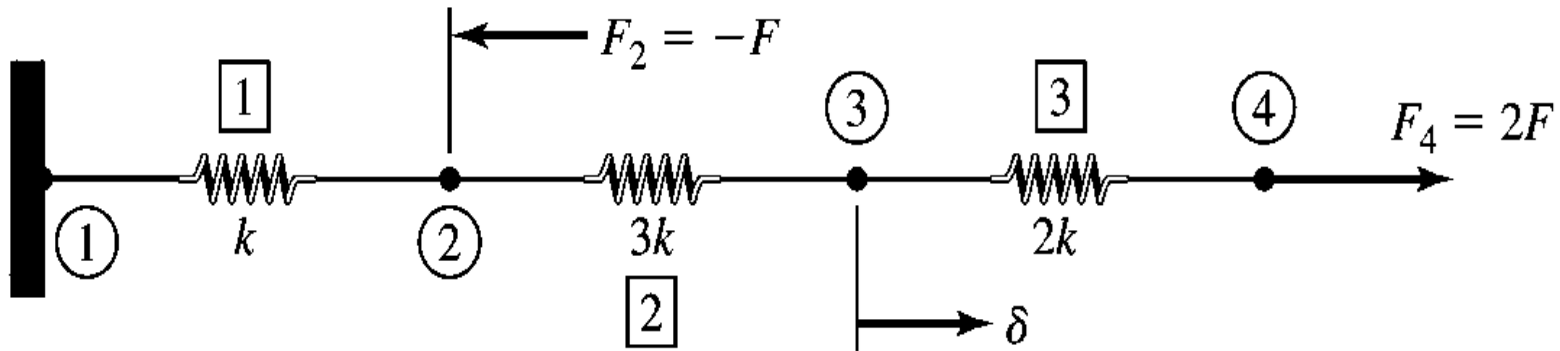


فرخطی، به عنوان یک المان محدود

روند کلی حل

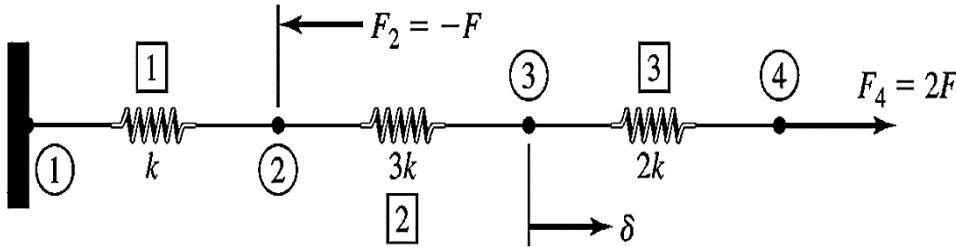
- ❖ فرمول بندی ماتریس های سختی المان ها به صورت مجزا
- ❖ نوشتن ارتباط جابه جایی های المانی با جابه جایی های کل
- ❖ مونتاژ معادلات تعادل کلی در فرم ماتریسی
- ❖ کاهش معادلات ماتریسی بر طبق قیود تعیین شده حل دستگاه معادلات برای جابه جایی های گرهی
- ❖ حل نیروهای عکس العمل با جایگذاری جابه جایی های گرهی

مثال



سیستم سه المانی با جابجایی مشخص غیر صفر در گره ۳

حل مثال



$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 4k & -3k & 0 \\ 0 & -3k & 5k & -2k \\ 0 & 0 & -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ -F \\ F_3 \\ 2F \end{Bmatrix}$$

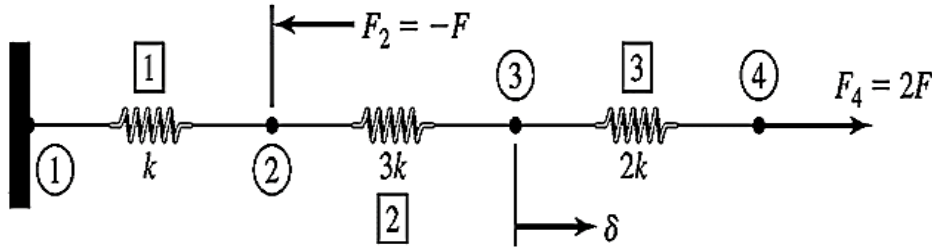
که با جایگذاری شرایط معلوم $U_1 = 0$ و $U_3 = \delta$ دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 4k & -3k & 0 \\ 0 & -3k & 5k & -2k \\ 0 & 0 & -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ \delta \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ -F \\ F_3 \\ 2F \end{Bmatrix}$$

از آنجا که $U_1 = 0$ است، با حذف ردیف و ستون اول مطابق زیر

$$\begin{bmatrix} 4k & -3k & 0 \\ -3k & 5k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ \delta \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ F_3 \\ 2F \end{Bmatrix}$$

حل مثال



دستگاه معادلات حاکم بر جابجایی‌های مجهول U_2 و U_4 و نیروی گرهی مجهول F_3 به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 5k & -3k & -2k \\ -3k & 4k & 0 \\ -2k & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ -F \\ 2F \end{Bmatrix}$$

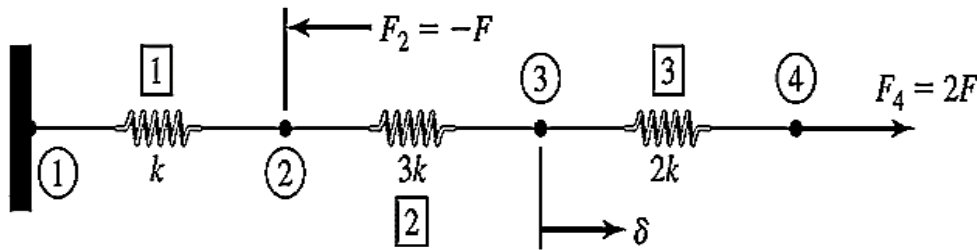
سپس ماتریس سختی به صورت زیر بخش‌بندی می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} 5k & -3k & -2k \\ -3k & 4k & 0 \\ -2k & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{\delta\delta}] & [k_{\delta U}] \\ [k_{U\delta}] & [k_{UU}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_\delta\} \\ \{F_U\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5k & -3k & -2k \\ -3k & 4k & 0 \\ -2k & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{\delta\delta}] & [k_{\delta U}] \\ [k_{U\delta}] & [k_{UU}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_\delta\} \\ \{F_U\} \end{Bmatrix}$$

حل مثال

به طوری که



$$[K_{\delta\delta}] = [5k]$$

$$[K_{\delta U}] = \begin{bmatrix} -3k & -2k \end{bmatrix}$$

$$[K_{U\delta}] = [K_{\delta U}]^T = \begin{bmatrix} -3k \\ -2k \end{bmatrix}$$

$$[K_{UU}] = \begin{bmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}$$

$$\{\delta\} = \{\delta\}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_\delta\} = \{F_3\}$$

$$\{F_U\} = \begin{Bmatrix} -F \\ 2F \end{Bmatrix}$$

حل مثال

$$\begin{bmatrix} [k_{\delta\delta}] & [k_{\delta U}] \\ [k_{U\delta}] & [k_{UU}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{\delta}\} \\ \{F_U\} \end{Bmatrix}$$

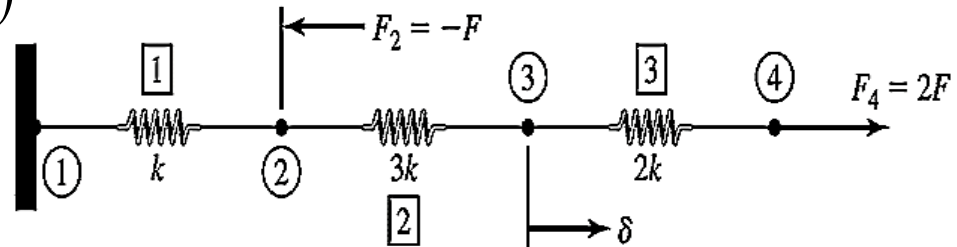
از سطر دوم ماتریس معادلات بخش‌بندی شده، نتیجه می‌شود که

$$[K_{U\delta}]\{\delta\} + [K_{UU}]\{U\} = \{F_U\}$$

این رابطه را می‌توان برای به‌دست آوردن جابجایی‌های مجهول به شکل زیر حل کرد

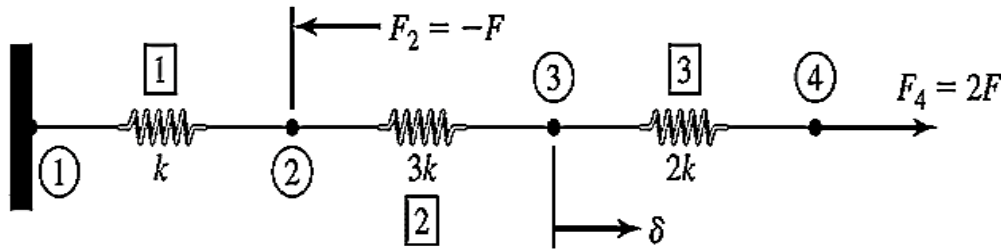
$$\{U\} = [K_{UU}]^{-1} (\{F\} - [K_{U\delta}]\{\delta\})$$

$$[K_{UU}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2k} \end{bmatrix}$$



با جایگذاری، جابجایی‌های مجهول مطابق زیر حاصل می‌گردند.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F + 3k\delta \\ 2F + 2k\delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{F}{4k} + \frac{3\delta}{4} \\ \frac{F}{k} + \delta \end{Bmatrix}$$



حل مثال

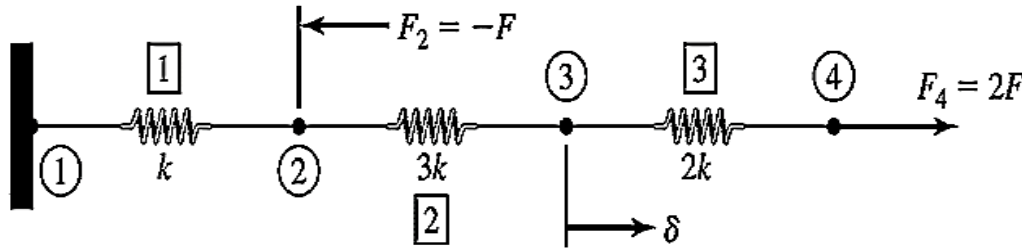
$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{F}{4k} + \frac{3\delta}{4} \\ \frac{F}{k} + \delta \end{Bmatrix}$$

و سپس با جایگذاری جابجایی‌ها در بخش بالایی، نیروی لازم در گره ۳ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_3 = -\frac{5}{4}F + \frac{3}{4}k\delta$$

و در نهایت نیروی عکس‌العمل در گره ۱ برابر است با:

$$F_1 = -kU_2 = \frac{F}{4} - \frac{3}{4}k\delta$$



حل مثال

برای کنترل نتایج، جابجایی‌های محاسبه شده در معادلات هر یک از المان‌ها قرار داده می‌شوند تا اطمینان حاصل شود که تعادل هر المان برقرار است.

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -kU_2 \\ kU_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

المان ۱

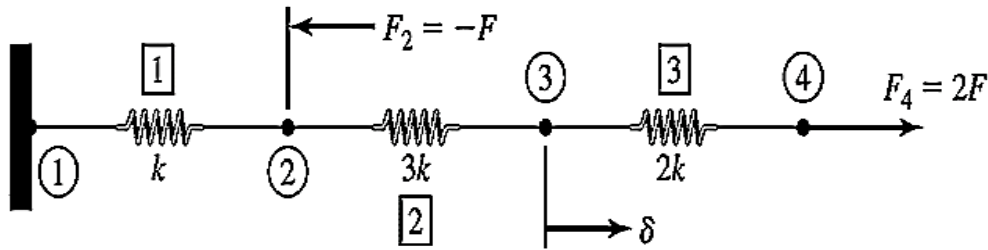
که نشان می‌دهد نیروهای المان ۱ برابر و مخالف هم هستند، به‌طوری‌که لازمه‌ی تعادل است.

$$\begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{F}{4k} + \frac{3}{4}\delta \\ \delta \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{3F}{4k} - \frac{3}{4}k\delta \\ \frac{3F}{4k} + \frac{3}{4}k\delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

المان ۲

که تعادل را تایید می‌کند.



حل مثال

$$\begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \frac{F}{k} + \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2F \\ 2F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_3^{(3)} \\ f_4^{(3)} \end{Bmatrix}$$

المان ۳

بنابراین المان ۳ نیز در تعادل است.

المان میله الاستیک

❖ المان میله‌ی مشابه المان فنر اما کاربردی‌تر

❖ فقط تحت نیروی محوری

❖ مفید در تحلیل سازه‌های خریایی

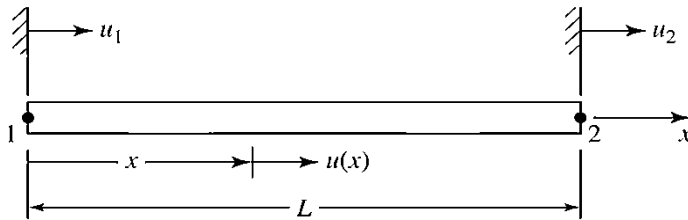
❖ مفروضات فرمول‌بندی المان میله :

۱- میله از لحاظ هندسی کاملاً مستقیم است

۲- مصالح تابع قانون هوک است.

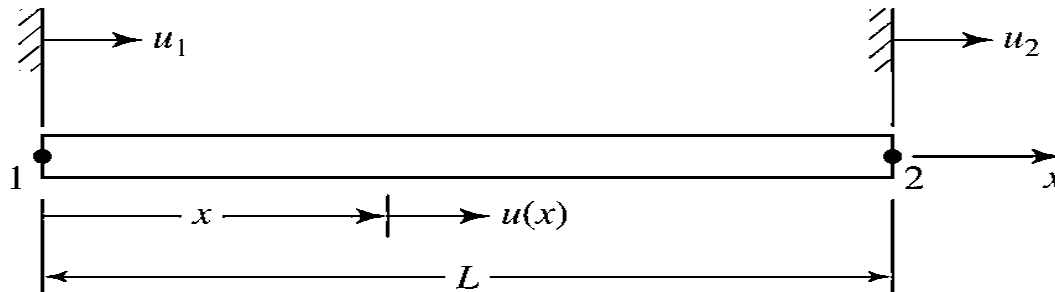
۳- نیروها فقط به نقاط انتهایی میله وارد می‌شوند.

۴- به دلیل ماهیت نوع اتصال المان به دیگر المان‌ها، المان میله فقط نیروی محوری را تحمل می‌کند و نیروی خمشی، پیچشی و برشی در آن ایجاد نمی‌شود.



کسته سازی تغییر مکان

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$



یک المان میله به همراه دستگاه مختصات المانی و نمایش جابجایی های گرهی

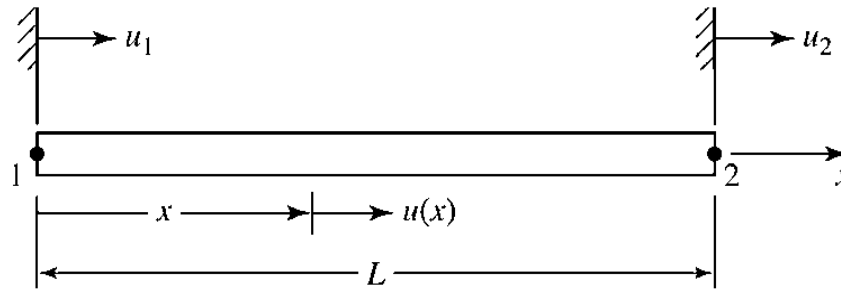
$$u(x=0) = u_1 \quad u(x=L) = u_2$$



کسته سازی تغییر مکان

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

روابط قبل منجر به شرایط مرزی (گرهی) زیر می شوند.



$$N_1(0)=1 \quad N_2(0)=0 \quad (۱)$$

$$N_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$N_1(L)=0 \quad N_2(L)=1 \quad (۲)$$

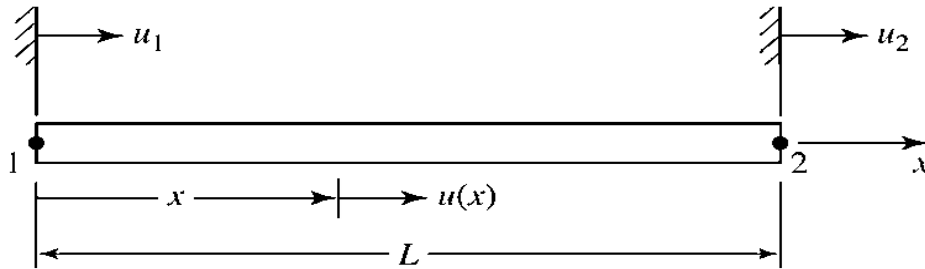
$$N_2(x) = b_0 + b_1x$$

با به کار بردن شرایط ارائه شده در رابطه (۱)، $a_0=1$ و $b_0=0$ به دست می آید و با اعمال شرایط مطرح شده در رابطه (۲)، $a_1=-\frac{1}{L}$ و $b_1=\frac{1}{L}$ حاصل می شود. بنابراین

توابع درونیاب یا توابع شکل عبارتند از:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

کسته سازی تغییرکان



و لذا تابع جابجایی پیوسته به صورت زیر حاصل می شود.

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \left(\frac{x}{L}\right)u_2 \quad (۳)$$

سپس برای راحتی بیشتر، رابطه (۳) را می توان در فرم ماتریسی مطابق زیر بیان کرد.

$$u(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \{u\}$$

$[N]$: ماتریس سطری توابع درونیاب

$\{u\}$: ماتریس ستونی (بردار) جابجایی های گرهی

روش سختی مستقیم

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

در صورتی که از رابطه (۳) استفاده شود، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

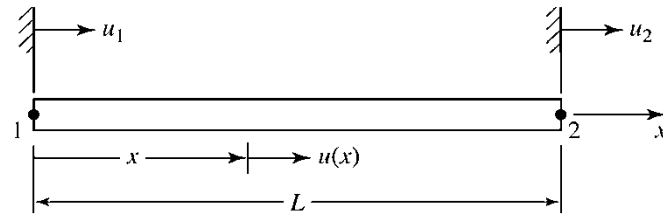
$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{u_2 - u_1}{L}$$

و نیروی محوری مربوطه برابر است با

$$P = \sigma_x A = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1)$$

$$f_1 = -\frac{AE}{L}(u_2 - u_1) \quad (۴)$$

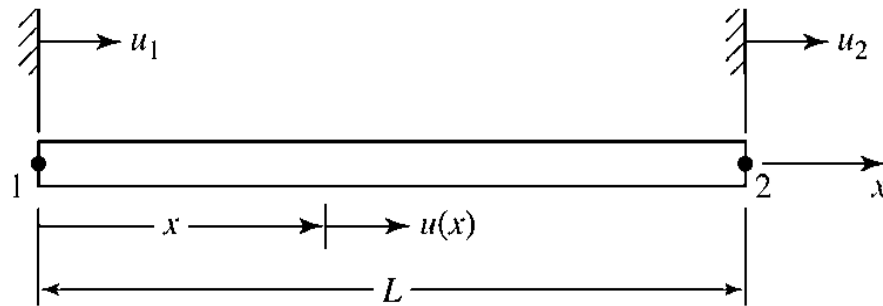
$$f_2 = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) \quad (۵)$$



روش سختی مستقیم

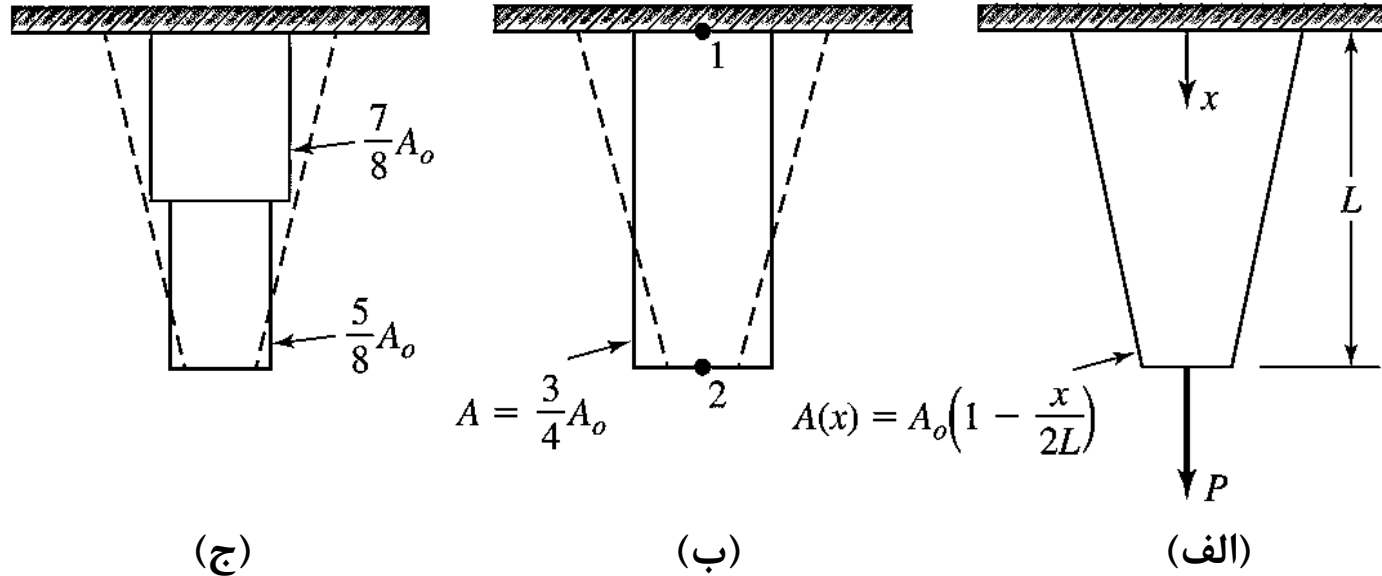
روابط (۴) و (۵) را می توان به فرم ماتریسی زیر نوشت.

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$



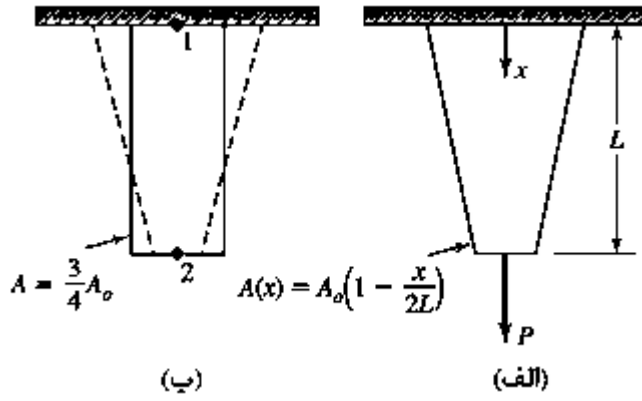
$$[k_e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال



(الف) میله محوری مخروط ناقص. (ب) مدل یک المانی. (ج) مدل دو المانی

حل مثال



(الف) برای یک **تک المان**، سطح مقطع $\frac{3}{4} A_0$ می باشد و لذا ثابت فنر المان برابر است با:

$$k = \frac{AE}{L} = \frac{3A_0E}{4L}$$

در نتیجه معادلات المان عبارتند از

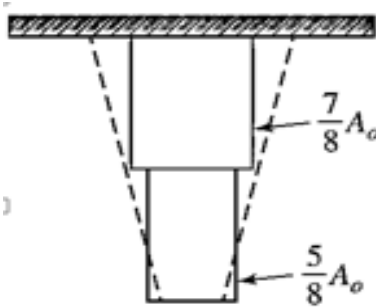
$$\frac{3A_0E}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \end{Bmatrix}$$

این المان و جابجایی های گرهی در شکل (۲-۷ب) نشان داده شده اند. با اعمال شرط مقید $U_1 = 0$ نتیجه می شود که:

$$U_2 = \frac{4PL}{3A_0E} = 1.333 \frac{PL}{A_0E}$$

که جابجایی در مکان $x = L$ می باشد.

حل مثال



ب) دو المان با طولی برابر با $\frac{L}{2}$ و با جابجایی‌های گرهی مربوطه در شکل نشان داده شده‌اند. برای المان ۱، است، بنابراین: $A_1 = \frac{7}{8} A_0$

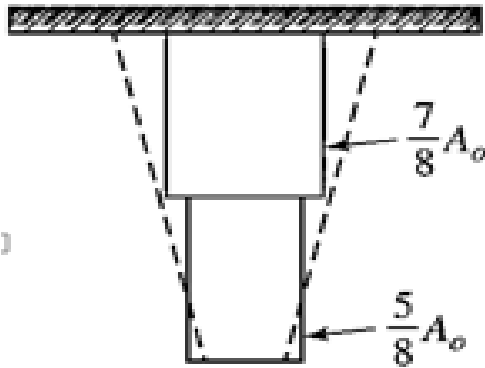
$$k_1 = \frac{A_1 E}{L_1} = \frac{7 A_0 E}{8(L/2)} = \frac{7 A_0 E}{4L}$$

در حالی که برای المان ۲:

$$A_1 = \frac{5 A_0}{8} \rightarrow k_2 = \frac{A_2 E}{L_2} = \frac{5 A_0 E}{8(L/2)} = \frac{5 A_0 E}{4L}$$

با توجه به این که نیرویی بر مرکز میله وارد نشده است، معادلات تعادل برای سیستم دو المانی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$



حل مثال

با اعمال شرط $U_1 = 0$ رابطه زیر حاصل خواهد شد.

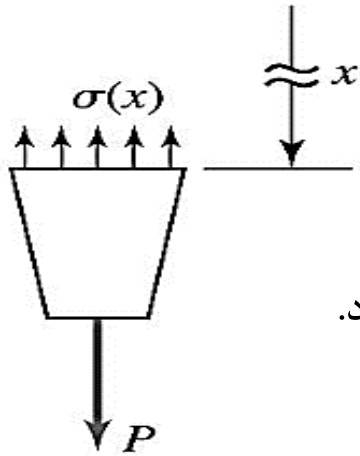
$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

با جمع این دو رابطه که باعث حذف مجهول U_3 می شود، نتیجه می شود که

$$U_2 = \frac{P}{k_1} = \frac{4PL}{7A_0E}$$

و با جایگذاری این نتیجه در رابطه نخست، داریم:

$$U_3 = \frac{k_1 + k_2}{k_2} = \frac{48PL}{35A_0E} = 1.371 \frac{PL}{A_0E}$$



حل مثال

ج) در حالت سوم برای به دست آوردن **جواب دقیق**، به شکل مقابل رجوع می شود. در این شکل دیاگرام جسم آزاد قسمتی از میله در حد فاصل موقعیت دلخواه x و انتهای $x = L$ شده است.

$$\sigma_x A = P \quad \text{برای تعادل،}$$

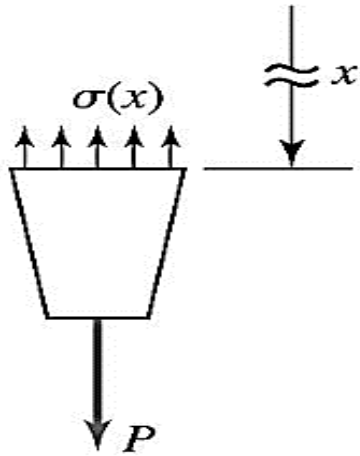
$$A = A(x) = A_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \quad \text{و از آنجا که}$$

تغییرات تنش محوری در امتداد طول میله به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma_x = \frac{P}{A_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right)}$$

بنابراین کرنش محوری برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right)}$$

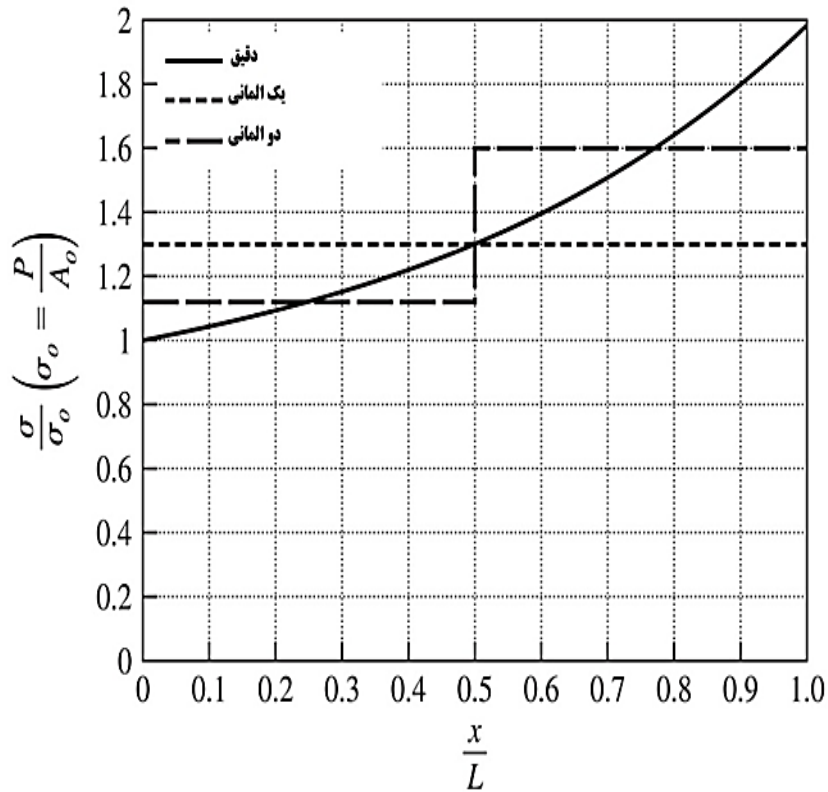


حل مثال

چون میله در $x=0$ ثابت است، جابه جایی در $x=L$ با رابطه زیر به دست می آید:

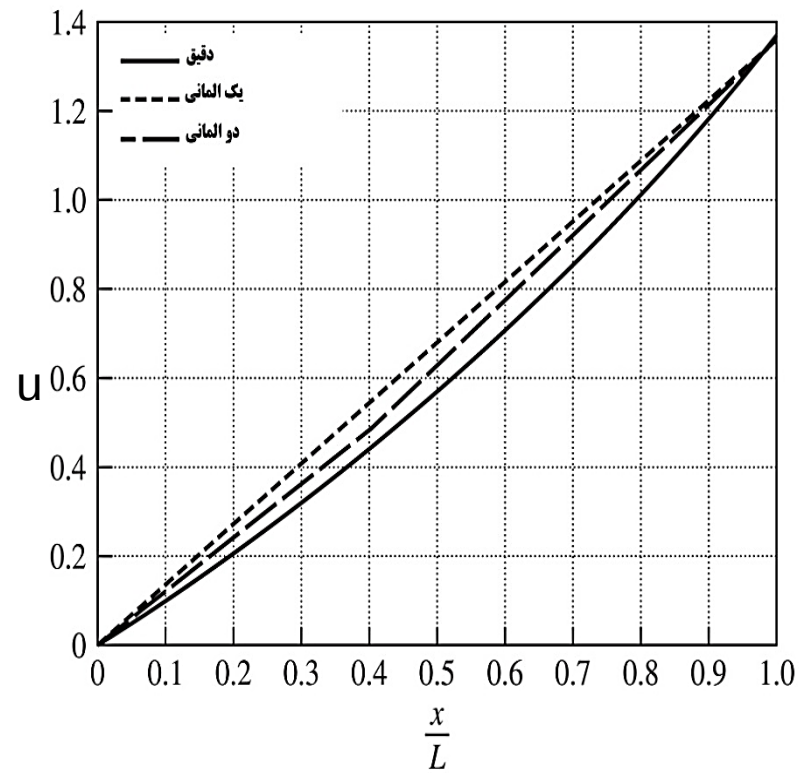
$$\begin{aligned}\delta &= \int_0^L \varepsilon_x dx = \frac{P}{EA_0} \int_0^L \frac{dx}{\left(1 - \frac{x}{2L}\right)} \\ &= \frac{2PL}{EA_0} \left[-\ln(2L - x) \right]_0^L = \frac{2PL}{EA_0} [\ln(2L) - \ln L] = \frac{2PL}{EA_0} \ln 2 = 1.386 \frac{PL}{EA_0}\end{aligned}$$

حل مثال



(و)

جواب‌های تنش



(هـ)

جواب‌های جابجایی